



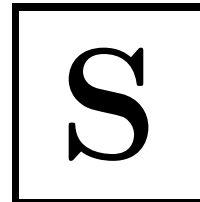
Międzynarodowy Konkurs Matematyczny KANGUR 2023

Student

klasy III i IV liceów oraz II, IV i V techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



Pytania po 3 punkty

1. Postać nieskracalna ułamka

$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$$

to

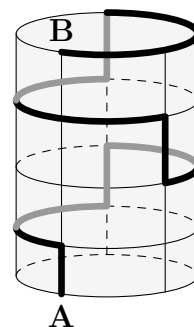
- A) 1. B) $\frac{7}{10}$. C) $\frac{49}{10}$. D) $\frac{49}{110}$. E) 49.

2. Julia w pięciu rzutach kostką wyrzuciła w sumie 19 oczek. Co najwyżej ile szóstek mogła wyrzucić?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

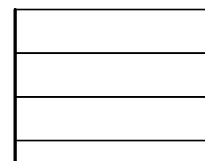
3. Puszka w kształcie walca ma wysokość 15 cm i obwód podstawy równy 30 cm. Mrówka wędruje z punktu **A** do punktu **B** wzdłuż drogi zaznaczonej na rysunku grubą linią. Droga składa się z odcinków pionowych i poziomych łuków kołowych. Jaka jest długość tej drogi?

- A) 45 cm B) 55 cm C) 60 cm D) 65 cm E) 75 cm



4. Ela ma farby w 4 kolorach i chce pomalować pokazaną obok flagę złożoną z trzech poziomych pasków. Każdy pasek ma być jednokolorowy, kolory pasków mogą się powtarzać, ale sąsiednie paski muszą mieć różne kolory. Na ile sposobów może to zrobić?

- A) 24 B) 27 C) 32 D) 36 E) 64

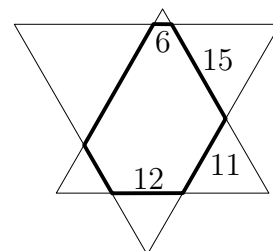


5. Ile jest dodatnich liczb naturalnych n , które mają dokładnie trzy dzielniki dodatnie równe odpowiednio 1, 2 i n ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. Sześciokąt obok powstał z przecięcia dwóch trójkątów równobocznych o bokach parami równoległych. Długości czterech boków sześciokąta podano na rysunku. Jaki jest obwód tego sześciokąta?

- A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 72

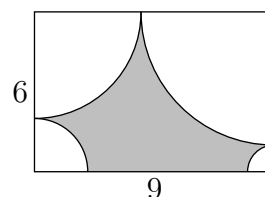


7. Ile par (x, y) złożonych z dodatnich liczb całkowitych spełnia równanie $x + 2y = 2^{10}$?

- A) $2^9 - 1$ B) 2^9 C) $2^9 + 1$ D) $2^9 + 2$ E) 0

8. Zacieniowana figura na rysunku obok powstała z prostokąta o wymiarach 6 na 9 przez odcięcie czterech ćwiartek kół o środkach w wierzchołkach prostokąta. Jaki jest obwód tej figury?

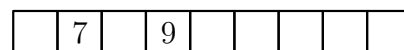
- A) 8π B) $4\pi + 12$ C) $6\pi + 6$ D) 25
E) Zależy to od promieni kół.



9. Jaka jest cyfra jedności liczby $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

- A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

10. Liczby od 1 do 9 należy tak rozmieścić w polach pokazanego diagramu, by suma liczb w każdym trzech kolejnych polach była podzielna przez 3. Liczby 7 i 9 zostały już wpisane. Na ile sposobów można rozmieścić pozostałe liczby?

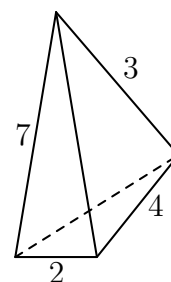


- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Pytania po 4 punkty

11. Długości wszystkich krawędzi pokazanego czworościanu są liczbami całkowitymi. Długości czterech krawędzi podano na rysunku. Jaka jest suma długości dwóch pozostałych krawędzi?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13



12. Jeśli $n! = 6! \cdot 7!$, to suma cyfr liczby n jest równa

- A) 1. B) 2. C) 4. D) 8. E) 9.

13. Danych jest pięć liczb a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 . Ich suma jest równa S . Ponadto $a_k = k + S$ dla $k = 1, 2, \dots, 5$. Czemu jest równe S ?

- A) $-\frac{15}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) -15 D) 15 E) -3

14. Dla ilu par (m, n) liczb całkowitych zachodzi nierówność $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. Na ścianie szkolnego korytarza wiszą w jednym rzędzie 23 fotografie, z których każda przedstawia albo kangura, albo bobra. Każda fotografia sąsiaduje z fotografią kangura. Co najwyżej ile fotografii bobra wisi w tym rzędzie?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

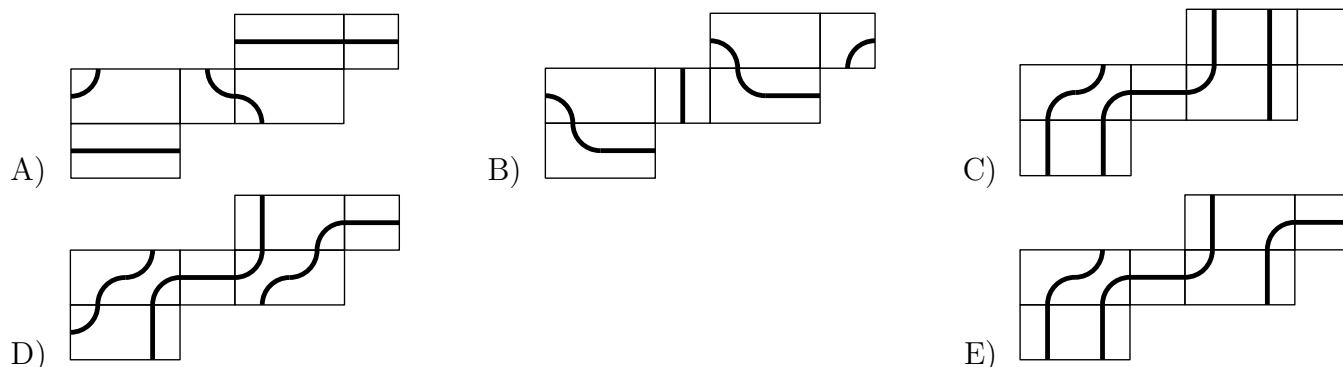
16. Liczbę 5^{5^6} zapisujemy w postaci n^n . Czemu jest równe n ?

- A) 5^{30} B) 5^6 C) 5^5 D) 30 E) 11

17. Wykresy wszystkich funkcji postaci $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$, gdzie a jest dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą, mają pewien punkt wspólny. Jaka jest suma współrzędnych tego punktu?

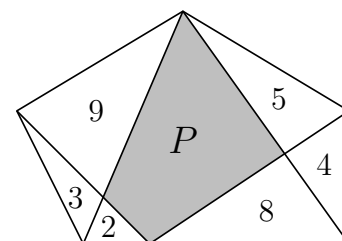
- A) 2 B) 4 C) 7 D) 8 E) Inna niż poprzednie.

18. Na powierzchni prostopadłościanu Leszek narysował zamkniętą linię. Który rysunek może przedstawiać siatkę tego prostopadłościanu?



19. Pięciokąt rozcięto na mniejsze części, jak pokazuje rysunek. Liczby wpisane w trójkąty oznaczają pola tych trójkątów. Jakie jest pole P zacieniowanego czworokąta?

- A) 17 B) 16 C) $\frac{31}{2}$ D) 15 E) Inna odpowiedź.



20. Ile dodatnich liczb całkowitych dzieli liczbę $2^{20} \cdot 3^{23}$, ale nie dzieli $2^{10} \cdot 3^{20}$?

- A) 460 B) 273 C) 30 D) 13 E) Inna liczba.

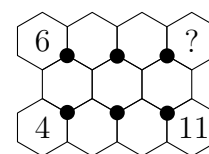
Pytania po 5 punktów

21. $\cos^2(1^\circ) + \cos^2(3^\circ) + \cos^2(5^\circ) + \dots + \cos^2(89^\circ) =$

- A) 20,5 B) 22 C) 22,5 D) 44,5 E) 45

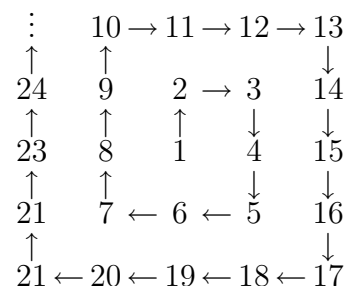
22. Liczby od 1 do 11 należy tak wpisać w sześciokątne pola diagramu obok, by wszystkie sumy trzech liczb wokół czarnych kropek były identyczne. Trzy liczby zostały już wpisane. Jaka liczba znajdzie się w polu ze znakiem zapytania?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9



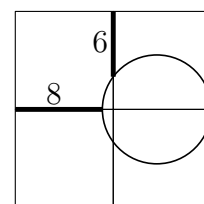
23. Kolejne liczby naturalne począwszy od 1 wypisujemy w postaci spirali jak na diagramie. Jaki kształt utworzy fragment spirali zawierający liczby 225, 226 i 227?

- A) $\begin{matrix} 227 \\ \uparrow \\ 226 \\ \uparrow \\ 225 \end{matrix}$ B) $225 \rightarrow 226 \rightarrow 227$ C) $\begin{matrix} 225 \\ \downarrow \\ 226 \\ \downarrow \\ 227 \end{matrix}$
- D) $\begin{matrix} 226 \rightarrow 227 \\ \uparrow \\ 225 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} 225 \rightarrow 226 \\ \downarrow \\ 227 \end{matrix}$

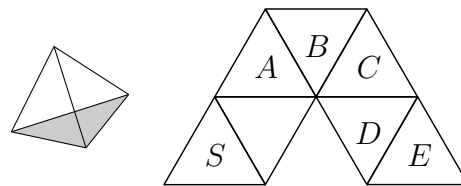


24. Kwadrat na rysunku podzielono na cztery mniejsze kwadraty. Okrąg jest styczny do prawego boku dużego kwadratu w jego środku — patrz rysunek. Jaka jest długość boku dużego kwadratu?

- A) 18 B) 20 C) 24 D) 28 E) 30



25. Mamy kostkę w kształcie czworościanu foremnego z jedną ścianą zacieniowaną. Kostkę ustawiamy ścianą zacieniowaną na trójkącie z literą S pokazanego diagramu. Następnie przetaczamy kostkę z jednego pola na sąsiednie, obracając ją zawsze wokół osi zawierającej jedną z krawędzi podstawy. Na którym z oznaczonych trójkątów kostka po raz pierwszy ustawi się znowu ścianą zacieniowaną do dołu?



- A) A B) B C) C D) D E) E

26. Jaka największa liczba dzieli wszystkie liczby postaci $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, gdzie n przebiega dodatnie liczby całkowite?

- A) $2^9 \cdot 3^3$ B) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ C) $2^9 \cdot 5^3$ D) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ E) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

27. Funkcje f i g są określone na zbiorze liczb rzeczywistych i spełniają układ równań

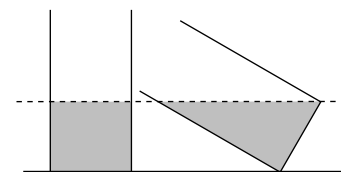
$$\begin{cases} f(x) + 2g(1-x) = x^2 \\ f(1-x) - g(x) = x^2. \end{cases}$$

Jakim wzorem wyraża się $f(x)$?

- A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ C) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ D) $x^2 - 4x + 5$

E) Takie funkcje nie istnieją.

28. Dwa identyczne pojemniki w kształcie walca zawierają tę samą ilość wody. Jeden pojemnik stoi prosto, a drugi jest pochylony jak na rysunku, lecz poziom wody w obu pojemnikach jest taki sam. Podstawy pojemników są kołami o polu powierzchni $3\pi \text{ m}^2$. Jaka jest objętość wody w każdym z pojemników?

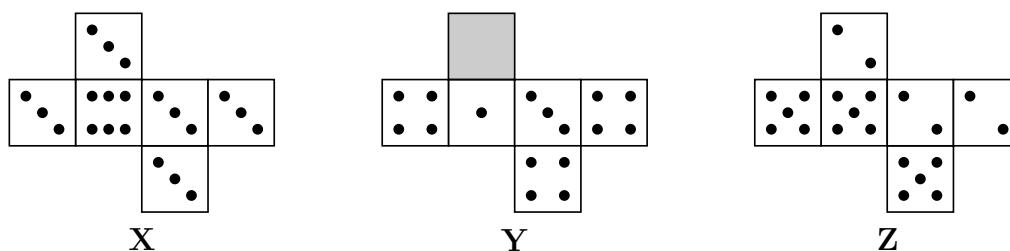


- A) $6\pi \text{ m}^3$ B) $9\pi \text{ m}^3$ C) $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$ D) $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$
- E) Zbyt mało danych, by to obliczyć.

29. Iloczyn sześciu kolejnych liczb całkowitych jest liczbą 12-cyfrową postaci $\overline{abb\ cdd\ cdd\ abb}$, gdzie a, b, c i d — niekoniecznie w tym porządku — są czterema kolejnymi liczbami. Czemu jest równe d ?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

30. Rysunek przedstawia siatki trzech niestandardowych kostek \mathbf{X} , \mathbf{Y} i \mathbf{Z} , przy czym jedna ze ścian kostki \mathbf{Y} została zasłonięta. Powiemy, że kostka \mathbf{A} jest *silniejsza* niż kostka \mathbf{B} , jeśli przy jednoczesnym rzucie obiema kostkami prawdopodobieństwo wyrzucenia na kostce \mathbf{A} większej liczby oczek niż na kostce \mathbf{B} przekracza 0,5. Jaka liczba oczek znajduje się na zasłoniętej ścianie kostki \mathbf{Y} , jeśli wiadomo, że kostka \mathbf{Z} jest silniejsza od kostki \mathbf{Y} , a kostka \mathbf{Y} jest silniejsza od kostki \mathbf{X} ?



- A) 1 lub 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6